Lycée Laymoune — prof. Yazough Mohamed

Calcul intégral

n° : 11 [20 %] — 2eme Bac . Pro

2ème Semestre — الحمد لله وبه أستعين :

① Définition et notation :

Soit f une fct continue sur un intervalle $[a;b]$. F est une primitive de f sur $[a;b]$.

Déf : On appelle intégrale de f de : a à b ; le nbre réel :

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

on la note par : $\int_a^b f(x)\,dx$

(ou encore : $\int_a^b f(t)\,dt$).

Exemples :

1°/ $\int_2^3 2x\,dx = ?$

$f(x) = 2x$ donc : $F(x) = x^2$

$\int_2^3 2x\,dx = [F(x)]_2^3 = [x^2]_2^3 = \boxed{5}$

2°/ $\int_0^{\pi/3} \cos(x)\,dx = ?$

$f(x) = \cos(x) \Rightarrow F(x) = \sin(x)$

donc : $\int_0^{\pi/3} \cos(x)\,dx = [\sin(x)]_0^{\pi/3}$

$= \sin(\pi/3) - \sin(0) = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

3°/ $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx = ?$

$f(x) = \frac{1}{x^2} = -\left(-\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{x}$

donc : $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-2}^{-1} = -\frac{1}{-1} - \left(-\frac{1}{-2}\right)$

$= 1 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

4°/ $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = ?$

on remarque : $\frac{2x}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}$

donc $f(x) = \frac{2x}{x^2+1} \Rightarrow F(x) = \ln(x^2+1)$

donc : $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \left[\ln(x^2+1)\right]_0^1 = \boxed{\ln(2)}$

Résultats : **R1** : si f est dérivable

alors : $\int_a^b f'(t)\,dt = [f(t)]_a^b = f(b) - f(a)$

expl : $\int_0^1 (3x^2+4x-1)\,dx$

$= \int_0^1 (x^3+2x^2-x)'\,dx$

$= [x^3+2x-x]_0^1$

$= (1+2-1) - 0 = \boxed{2}$

R2 : $\int_a^b dx = [x]_a^b$

$\int_a^b kx\,dx = \left[k\frac{x^2}{2}\right]_a^b$; $(k \in \mathbb{R})$

$\int_a^a f(x)\,dx = \boxed{0}$ (lorsque $a = b$)

$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

② Linéarité et relation de Chasles.

- Linéarité de l'intégrale : $\forall(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$;

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$$

- Relation de Chasles : pour tout $a \leqslant c \leqslant b$.

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

EX : 1 Vérifier les calculs suivants :

1/ $\int_{-1}^{0} (2x+1)\,dx = \boxed{0}$

2/ $\int_{0}^{1} (x^3+6x+1)\,dx = \boxed{\frac{17}{4}}$

3/ $\int_{4}^{16} \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \boxed{2}$

4/ $\int_{0}^{3} \frac{dx}{x+2} = \boxed{\ln(4)}$

EX : 2 : Montrer que :

1/ $\int_{0}^{\pi} \left(4x + \frac{2}{3}\sin(x)\right)dx = \boxed{2\pi^2 + \frac{4}{3}}$

2/ $\int_{0}^{1} (5x^3 + e^x)\,dx = \boxed{e + \frac{1}{4}}$

3/ $\int_{1}^{e} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx = \boxed{\frac{1}{e}}$

4/ $\int_{1}^{2} (2x+3)(x^2+3x)^2\,dx = \boxed{2}$

③ Exemples types :

$$\int_a^b x^r\,dx = \left[\frac{x^{r+1}}{r+1}\right] \; ; \; r \in \mathbb{Q} - \{-1\}$$

$$\int_a^b \sqrt[n]{x^m} = \int_a^b x^{\frac{m}{n}}\,dx = \left[\frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1}\right]_a^b$$

$$\int_a^b e^x\,dx = \left[e^x\right]_a^b$$

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \left[\ln(|x|)\right]_a^b$$

$$\int_a^b \cos(x)\,dx = \left[\sin(x)\right]_a^b$$

$$\int_a^b \sin(x)\,dx = \left[-\cos(x)\right]_a^b$$

$$\int_a^b u^n(x)u'(x)\,dx = \left[\frac{u^{n+1}(x)}{n+1}\right]_a^b$$

$$\int_a^b \frac{u'(x)}{u^n(x)}\,dx \underset{n\neq 1}{=} \left[\frac{-1}{n-1} \times \frac{1}{u^{n-1}(x)}\right]_a^b$$

$$\int_a^b \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \left[\ln(|u(x)|)\right]_a^b$$

$$\int_a^b u'(x)e^{u(x)}\,dx = \left[e^{u(x)}\right]_a^b$$

Exemples : 1/ $I = \int_0^{\pi/4} \cos(x)\sin^3(x)\,dx$

posons : $u(x) = \sin(x)$, donc :

$I = \int_0^{\pi/4} u'(x)u^3(x)\,dx$

$= \left[\frac{u^{3+1}(x)}{3+1}\right]_0^{\pi/4} = \left[\frac{1}{4}\sin^4(x)\right]_0^{\pi/4}$

$= \frac{1}{4}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 - 0^4\right) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{2^4} = \boxed{\frac{1}{16}}$

2/ $J = \int_0^1 \frac{4x^3}{(x^4+1)^3}\,dx = ?$

on pose : $u(x) = (x^4+1) \Rightarrow u'(x) = 4x^3$

donc : $J = \int_0^1 \frac{u'(x)}{u^3(x)}\,dx = \left[\frac{-1}{3-1} \times \frac{1}{u^{3-1}(x)}\right]_0^1$

$= \left[\frac{-1}{2} \times \frac{1}{(x^4+1)^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{8}}$

EX : 3 Montrer que :

1/ $\int_0^3 2x e^{x^2}\,dx = \boxed{e^9 - 1}$

2/ $\int_1^2 \sqrt{x}\,dx = \boxed{\frac{16\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}}$

3/ $\int_1^2 \frac{2x+3}{x^2+3x}\,dx = \boxed{\ln\left(\frac{5}{2}\right)}$

④ Intégration par partie :

Règle :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = \left[u(x)\,v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

Expls : 1°/ $\int_0^{\pi/2} x\cos(x)\,dx = ?$

on a : $x\cos(x) = u'(x)\times v(x)$

avec : $\begin{cases} u'(x) = \cos(x) \\ v(x) = x \end{cases} \overset{\text{donc}}{\Longrightarrow} \begin{cases} u(x) = \sin(x) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

et on obtien :

$$\int_0^{\pi/2} x\cos(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} u(x)v'(x)\,dx$$

$$= \left[x\sin(x)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(x)\,dx$$

$$= \left[x\sin(x)\right]_0^{\pi/2} - \left[-\cos(x)\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{2}\times 1 - 0 - \left[-0-(-1)\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} - [+1] = \boxed{\frac{\pi}{2}+1}$$

2°/ $\int_1^e \ln(x)\,dx = ?$

on écrit : $\ln(x) = \underbrace{1}_{u'(x)} \times \underbrace{\ln(x)}_{v(x)}$

on pose : $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln(x) \end{cases}$ donc

on obtient : $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$ et

on applique une intégration par partie :

$$\int_1^e \underbrace{\ln(x)}_{u'\times v}\,dx = \left[u(x)\,v(x)\right]_1^e - \int_1^e u(x)v'(x)\,dx$$

$$= \left[x\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \underbrace{x\times\frac{1}{x}}_{=1}\,dx$$

$$= \left[x\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e 1\,dx$$

$$= e\ln(e) - 1\times 0 - [x]_1^e$$

$$= e\times 1 - 0 - (e-1)$$

$$= e - e + 1 = \boxed{1}$$

EX:41 A l'aide d'une intégration par partie montrer que :

1°/ $\int_{-1}^{2} xe^x\,dx =$

2°/ $\int_0^{\pi} x\sin(x)\,dx =$

3°/ $\int_2^{e} 4x^3\ln(x)\,dx =$

⑤ Valeur moyenne d'une fonction :

Soit f une fct continue sur $[a;b]$ avec : $a<b$.

Déf Le nombre : $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ est appelé valeur moyenne de la fonction f sur $[a;b]$.

⑥ La positivité de l'intégrale et ses conséquences.

a) Positivité de l'intégrale

Si $f \geqslant 0$ et si $a \leqslant b$ alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$$

b) Inégalité :

Si $f \leqslant g$ et si $a \leqslant b$ alors :

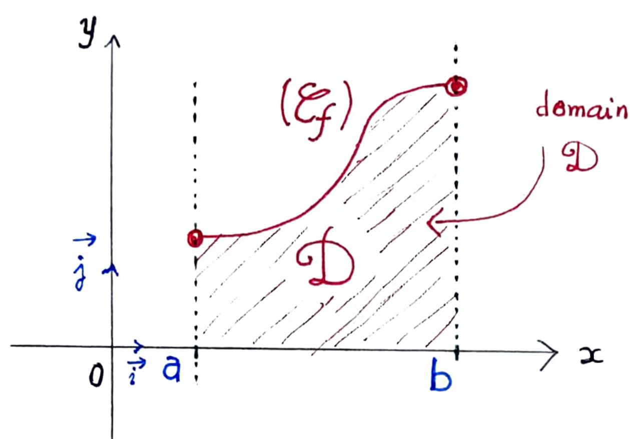
$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

⑦ Calcul de surfaces et de volumes :

7-a) Aire d'un domaine du plan limité par deux courbes et deux droites parallèles à l'axe des ordonnés :

f étant une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.

Soit $\mathcal{D}$ la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x=a$ et $x=b$:



→ L'aire, en unités d'aire, de ce domaine $\mathcal{D}$ est :

$$\mathcal{A}=\int_a^b f(x)\,dx \quad (U.A)$$

avec : U.A représente l'unité d'aire.

1 unité d'aire $=$ (1 unité de x) $\times$ (1 unité de y) $= \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$

Exemple : Calculer l'aire, en cm^2, du domaine $\mathcal{D}$; sachant que :
$f(x)= x^2+2x$; $a=1$; $b=2$
$\|\vec{i}\| = 2cm$ et $\|\vec{j}\| = 1\,cm$

Réponse : on a : $x^2+2x \geq 0$ sur $[1;2]$

donc :
→ on applique : $\mathcal{A}=\int_a^b f(x)\,dx \ (U.A)$

on a : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)' dx$

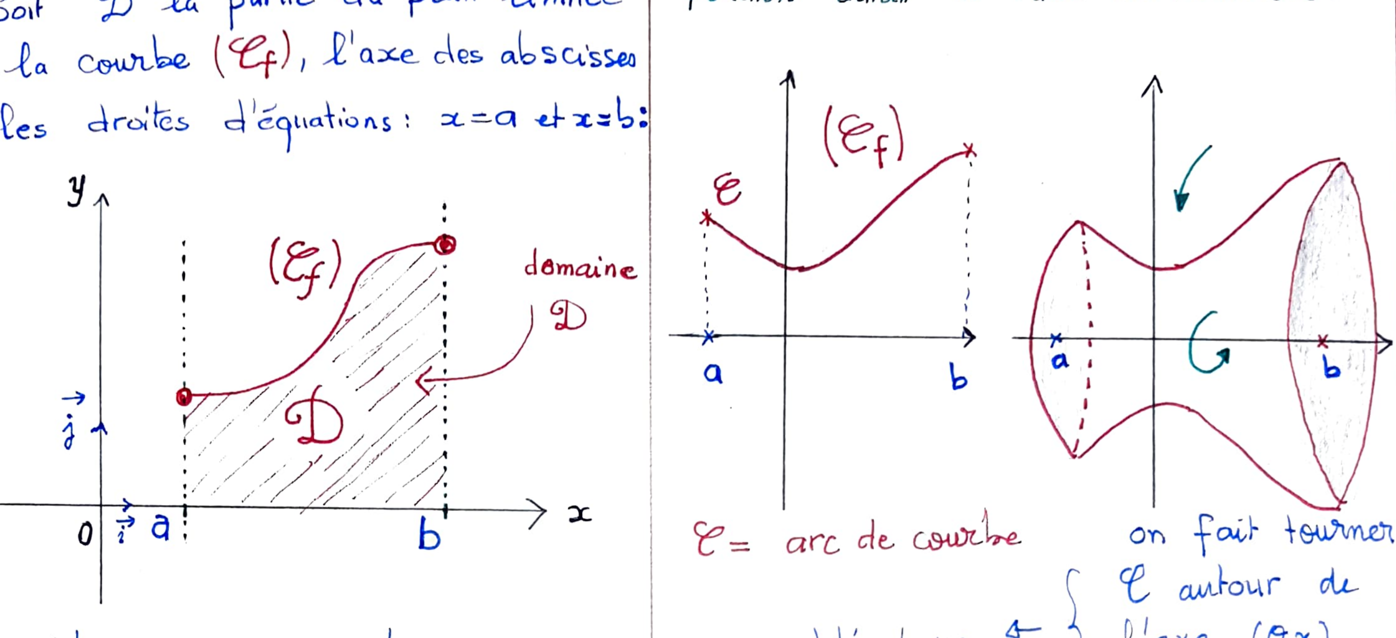
$= \left[\frac{x^3}{3}+x^2\right]_1^2 = \frac{8}{3}+4-\left(\frac{1}{3}+1\right)$

$= \frac{8}{3}-\frac{1}{3}+3 = \frac{7}{3}+3 = \boxed{\frac{16}{3}}$

→ $(U.A) = 2cm \times 1\,cm = 2\,cm^2$

donc : $\mathcal{A} = \frac{16}{3}\times 2\,cm^2 = \boxed{\frac{32}{3}\ cm^2}$

7-b) Volume d'un solide de révolution engendré par la rotation de la courbe d'une fonction autour de l'axe des abscisses.



$\mathcal{C}=$ arc de courbe

on fait tourner $\mathcal{C}$ autour de l'axe (Ox). on obtient un solide de révolution.

Le volume du solide est :

$$V = \pi \times \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx \quad (U.V)$$

avec : $(U.V)$ représente l'unité de volume.

Exemple : $f(x)=\sqrt{x} = x^{1/2}$
$[a;b]=[0;1]$

ici V représente le volume d solide suivant :

on a :

$V = \pi \times \int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx$

$= \pi \times \int_0^1 x\,dx = \pi \times \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$

$= \pi \times \left(\frac{1}{2}-0\right) (U.V)$

$\Rightarrow \quad V = \frac{\pi}{2}\ (U.V).$

وبالله التوفيق !

n°.11 - 2ème sem